Методы оптимизации.

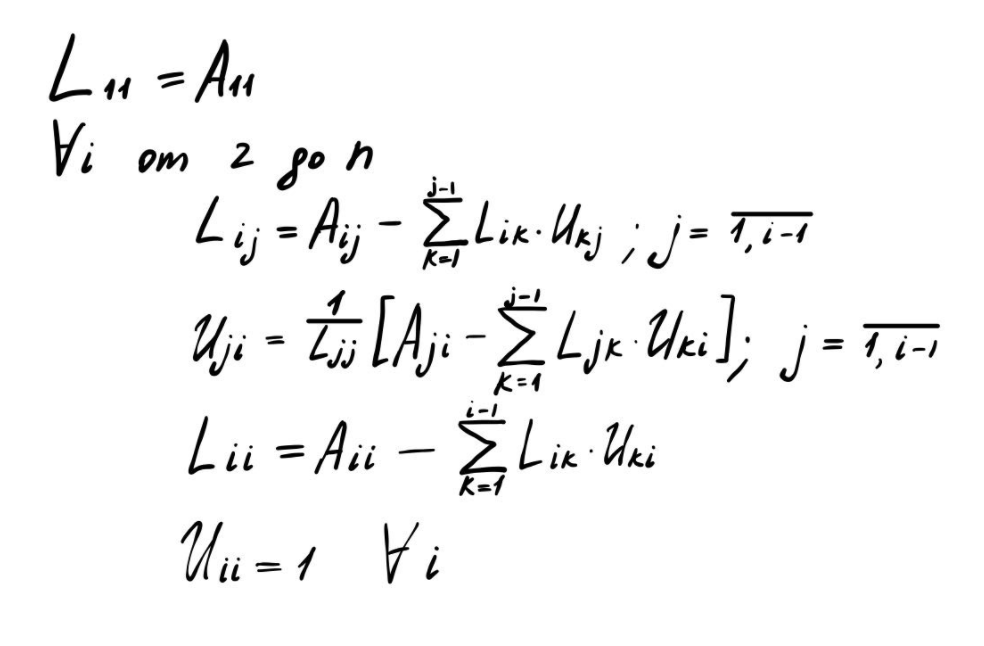
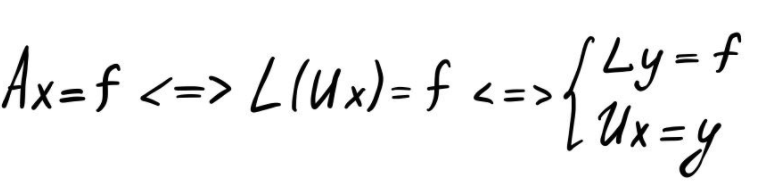
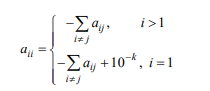
Отчет по лабораторной работе №3

Работа выполнена группой:

Дзюба Мария M3235  
Карасева Екатерина M3235  
Рындина Валерия M3235

Университет ИТМО, 2021

Цель работы: Изучить и реализовать метод решения СЛАУ. Провести исследование методов по различным характеристикам.

* 1. Постановка задачи  
     Реализовать прямой метод решения СЛАУ на основе LU-разложения.
  2. Решение задачи:
     + Вычислительная схема метода:  
       исходная задача: Ax = f  
       преобразуем задачу в: Ux = y = L-1f => LUx = f, где U - это верхнедиагональная матрица, L - это нижнедиагональная матрица.  
       То есть матрицу А можно представить как A=LU, по следующим формулам:  
         
       Итоговая задача в итоге преобразуется в систему уравнений:  
         
       Итоговая задача в итоге преобразуется в систему уравнений: Каждое из уравнений полученной системы легко решается обратным ходом метода Гаусса в контексте того, что матрицы U и L являются верхнедиагональными и нижнедиагональными.
     + Пример решения задачи реализованным методом:
       1. Условие задачи и начальные данные:   
          x =
       2. Численный ответ: x =
  3. Постановка задачи:  
     Провести исследование реализованного метода на матрицах, число обусловленности которых регулируется за счёт изменения диагонального преобладания (то есть оценить влияние увеличения числа обусловленности на точность решения). Для этого необходимо решить последовательность СЛАУ: Akxk = fk, k = 0, 1, 2, 3…  
     Для каждого k , для которого система Akxk = fk вычислительно разрешима, оценить погрешность найденного решения.
  4. Решение задачи:
     + Схема построения СЛАУ:  
       матрицы Ak строятся следующим образом:  
         
       и aij ∈{0, -1, -2, -3, -4} выбираются достаточно произвольно, а правая часть fk получается умножением матрицы Аk на вектор x\* = (1,…n).
     + Пример решения задачи реализованным методом:  
       См пример в Задаче 1
     + Исследования погрешностей найденного решения:  
       см **Приложение 1**
     + Вывод: С увеличением числа обусловленности матрицы ошибка решения растет, что особенно хорошо заметно при переходе от хорошо обусловленных матриц к плохо обусловленным.
  5. Постановка задачи:  
     Провести аналогичные исследования на матрицах Гильберта различной размерности. Матрица Гильберта размерности k.
  6. Решение задачи:
     + Схема построения СЛАУ:  
       матрицы Гильберта Ak строятся следующим образом:  
         
       правая часть fk получается умножением матрицы Аk на вектор x\* = (1,…n).
     + Пример решения задачи реализованным методом:
       1. Условие задачи и начальные данные:   
          \* x =
       2. Численный ответ: x =
     + Исследования погрешностей найденного решения:  
       см **Приложение 2**
     + Вывод: Огромная погрешность, которая имеет тенденцию увеличиваться с увеличением размерности матрицы. Такую большую погрешность можно объяснить большими числами в ответах.
  7. Постановка задачи:  
     Реализовать метод Гаусса с выбором ведущего элемента для плотных матриц. Сравнить метод Гаусса по точности получаемого решения и по количеству действий с реализованным прямым методом LU-разложения.
  8. Решение задачи:
     + Вычислительная схема метода Гаусса:  
        Находим наибольший метод в столбце, преобразуем его в 1 деление всей строки на этот элемент. Обнуляем другие элементы этого столбца вычитанием из строк «нашей» строки, умноженной на элемент данной строки, «нашего» столбца.
     + Пример решения задачи реализованным методом:
       1. Условие задачи и начальные данные:  
          x =
       2. Численный ответ: x =
     + Таблица сравнения метода Гаусса и прямого метода LU-разложения по точности получаемого решения и по количеству действий:  
       см **Приложение 3.**
     + Вывод: Можно проследить, что оба метода имеют практически идентичные значения при подсчете погрешности, что говорит об равной точности. Стоит подметить, что метод Гаусса в разы больше производит действий, чем метод LU-разложения.
  9. Ожидается…..
  10. Постановка задачи:

1. Для разработанного программного кода в отчете привести код основных модулей, диаграмму классов, сделать текстовое описание.
   1. Решение задачи
2. Код основных модулей и текстовое описание представлены по ссылке <https://github.com/MariaDziuba/metopt3>. Диаграмма классов приведена в **Приложение 4**.

Приложение 1

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| n | k |  | ‖xn - xk‖ | ‖x\*-xk‖/‖x\*‖ |
| 15 | 0 |  | 0.00000000000041 | 0.0000000000000117 |
| 15 | 1 |  | 0.00000000000057 | 0.0000000000000161 |
| 15 | 2 |  | 0.00000000000303 | 0.0000000000000861 |
| 15 | 3 |  | 0.00000000008434 | 0.0000000000023951 |
| 15 | 4 |  | 0.00000000020212 | 0.0000000000057399 |
| 15 | 5 |  | 0.00000000326162 | 0.0000000000926237 |
| 15 | 6 |  | 0.00000001528084 | 0.0000000004339467 |
| 65 | 0 |  | 0.00000000000021 | 0.0000000000000007 |
| 65 | 1 |  | 0.00000000001720 | 0.0000000000000562 |
| 65 | 2 |  | 0.00000000002563 | 0.0000000000000837 |
| 65 | 3 |  | 0.00000000048441 | 0.0000000000015828 |
| 65 | 4 |  | 0.00000003175205 | 0.0000000001037488 |
| 65 | 5 |  | 0.00000002630400 | 0.0000000000859475 |
| 65 | 6 |  | 0.00000001616883 | 0.0000000000528311 |
| 115 | 0 |  | 0.00000000000255 | 0.0000000000000036 |
| 115 | 1 |  | 0.00000000001385 | 0.0000000000000193 |
| 115 | 2 |  | 0.00000000091658 | 0.0000000000012790 |
| 115 | 3 |  | 0.00000000548645 | 0.0000000000076557 |
| 115 | 4 |  | 0.00000004558477 | 0.0000000000636080 |
| 115 | 5 |  | 0.00000008716376 | 0.0000000001216263 |
| 115 | 6 |  | 0.00001275237923 | 0.0000000177943832 |
| 165 | 0 |  | 0.00000000000680 | 0.0000000000000055 |
| 165 | 1 |  | 0.00000000013185 | 0.0000000000001073 |
| 165 | 2 |  | 0.00000000137880 | 0.0000000000011217 |
| 165 | 3 |  | 0.00000000670192 | 0.0000000000054521 |
| 165 | 4 |  | 0.00000006883962 | 0.0000000000560021 |
| 165 | 5 |  | 0.00000025185766 | 0.0000000002048900 |
| 165 | 6 |  | 0.00000143245093 | 0.0000000011653204 |
| 215 | 0 |  | 0.00000000001254 | 0.0000000000000069 |
| 215 | 1 |  | 0.00000000018244 | 0.0000000000000999 |
| 215 | 2 |  | 0.00000000042157 | 0.0000000000002308 |
| 215 | 3 |  | 0.00000002272447 | 0.0000000000124418 |
| 215 | 4 |  | 0.00000055434033 | 0.0000000003035061 |
| 215 | 5 |  | 0.00000317557055 | 0.0000000017386519 |
| 215 | 6 |  | 0.00000680995161 | 0.0000000037285066 |
| 265 | 0 |  | 0.00000000002078 | 0.0000000000000083 |
| 265 | 1 |  | 0.00000000078908 | 0.0000000000003159 |
| 265 | 2 |  | 0.00000000940523 | 0.0000000000037656 |
| 265 | 3 |  | 0.00000003259960 | 0.0000000000130520 |
| 265 | 4 |  | 0.00000169197672 | 0.0000000006774215 |
| 265 | 5 |  | 0.00000652602387 | 0.0000000026128427 |
| 265 | 6 |  | 0.00000300238652 | 0.0000000012020740 |
| 315 | 0 |  | 0.00000000002109 | 0.0000000000000065 |
| 315 | 1 |  | 0.00000000012349 | 0.0000000000000382 |
| 315 | 2 |  | 0.00000000822502 | 0.0000000000025421 |
| 315 | 3 |  | 0.00000005291591 | 0.0000000000163549 |
| 315 | 4 |  | 0.00000075180849 | 0.0000000002323643 |
| 315 | 5 |  | 0.00001171868421 | 0.0000000036219377 |
| 315 | 6 |  | 0.00011939986708 | 0.0000000369033652 |
| 365 | 0 |  | 0.00000000005412 | 0.0000000000000134 |
| 365 | 1 |  | 0.00000000024717 | 0.0000000000000613 |
| 365 | 2 |  | 0.00000002459916 | 0.0000000000060975 |
| 365 | 3 |  | 0.00000019482658 | 0.0000000000482923 |
| 365 | 4 |  | 0.00000024109461 | 0.0000000000597609 |
| 365 | 5 |  | 0.00001216054094 | 0.0000000030142749 |
| 365 | 6 |  | 0.00007707991131 | 0.0000000191060614 |
| 415 | 0 |  | 0.00000000020281 | 0.0000000000000415 |
| 415 | 1 |  | 0.00000000138560 | 0.0000000000002834 |
| 415 | 2 |  | 0.00000000689983 | 0.0000000000014111 |
| 415 | 3 |  | 0.00000008095069 | 0.0000000000165548 |
| 415 | 4 |  | 0.00000211298840 | 0.0000000004321172 |
| 415 | 5 |  | 0.00001241771684 | 0.0000000025394879 |
| 415 | 6 |  | 0.00002550153320 | 0.0000000052151967 |
| 465 | 0 |  | 0.00000000002396 | 0.0000000000000041 |
| 465 | 1 |  | 0.00000000281374 | 0.0000000000004852 |
| 465 | 2 |  | 0.00000002278490 | 0.0000000000039294 |
| 465 | 3 |  | 0.00000003673907 | 0.0000000000063359 |
| 465 | 4 |  | 0.00000146534128 | 0.0000000002527087 |
| 465 | 5 |  | 0.00000332743770 | 0.0000000005738406 |
| 465 | 6 |  | 0.00032426557451 | 0.0000000559219355 |
| 515 | 0 |  | 0.00000000012941 | 0.0000000000000192 |
| 515 | 1 |  | 0.00000000094176 | 0.0000000000001394 |
| 515 | 2 |  | 0.00000001431519 | 0.0000000000021184 |
| 515 | 3 |  | 0.00000061581156 | 0.0000000000911309 |
| 515 | 4 |  | 0.00000588208640 | 0.0000000008704608 |
| 515 | 5 |  | 0.00006842920693 | 0.0000000101264992 |
| 515 | 6 |  | 0.00021179568571 | 0.0000000313425940 |
| 565 | 0 |  | 0.00000000028672 | 0.0000000000000369 |
| 565 | 1 |  | 0.00000000288284 | 0.0000000000003713 |
| 565 | 2 |  | 0.00000006890086 | 0.0000000000088743 |
| 565 | 3 |  | 0.00000100517666 | 0.0000000001294656 |
| 565 | 4 |  | 0.00000597622684 | 0.0000000007697310 |
| 565 | 5 |  | 0.00000876836455 | 0.0000000011293550 |
| 565 | 6 |  | 0.00073509193712 | 0.0000000946789739 |
| 615 | 0 |  | 0.00000000040747 | 0.0000000000000462 |
| 615 | 1 |  | 0.00000000200415 | 0.0000000000002273 |
| 615 | 2 |  | 0.00000004505048 | 0.0000000000051100 |
| 615 | 3 |  | 0.00000024487622 | 0.0000000000277757 |
| 615 | 4 |  | 0.00000473857480 | 0.0000000005374851 |
| 615 | 5 |  | 0.00009132824521 | 0.0000000103591423 |
| 615 | 6 |  | 0.00160280387454 | 0.0000001818021724 |
| 665 | 0 |  | 0.00000000005899 | 0.0000000000000060 |
| 665 | 1 |  | 0.00000000181798 | 0.0000000000001834 |
| 665 | 2 |  | 0.00000010982234 | 0.0000000000110797 |
| 665 | 3 |  | 0.00000031550361 | 0.0000000000318305 |
| 665 | 4 |  | 0.00000544870217 | 0.0000000005497076 |
| 665 | 5 |  | 0.00001021666573 | 0.0000000010307369 |
| 665 | 6 |  | 0.00013246921032 | 0.0000000133645275 |
| 715 | 0 |  | 0.00000000051016 | 0.0000000000000462 |
| 715 | 1 |  | 0.00000000742138 | 0.0000000000006716 |
| 715 | 2 |  | 0.00000003401057 | 0.0000000000030779 |
| 715 | 3 |  | 0.00000086380646 | 0.0000000000781741 |
| 715 | 4 |  | 0.00000975922102 | 0.0000000008832048 |
| 715 | 5 |  | 0.00010151526471 | 0.0000000091870827 |
| 715 | 6 |  | 0.00000103384741 | 0.0000000000935627 |
| 765 | 0 |  | 0.00000000099788 | 0.0000000000000816 |
| 765 | 1 |  | 0.00000000281930 | 0.0000000000002306 |
| 765 | 2 |  | 0.00000000761303 | 0.0000000000006226 |
| 765 | 3 |  | 0.00000092163940 | 0.0000000000753709 |
| 765 | 4 |  | 0.00000585440923 | 0.0000000004787690 |
| 765 | 5 |  | 0.00003020160485 | 0.0000000024698635 |
| 765 | 6 |  | 0.00023100572938 | 0.0000000188914668 |
| 815 | 0 |  | 0.00000000051656 | 0.0000000000000384 |
| 815 | 1 |  | 0.00000001147072 | 0.0000000000008531 |
| 815 | 2 |  | 0.00000003118130 | 0.0000000000023191 |
| 815 | 3 |  | 0.00000095593851 | 0.0000000000710976 |
| 815 | 4 |  | 0.00000354051570 | 0.0000000002633245 |
| 815 | 5 |  | 0.00005051949545 | 0.0000000037573683 |
| 815 | 6 |  | 0.00007212227745 | 0.0000000053640670 |
| 865 | 0 |  | 0.00000000068211 | 0.0000000000000464 |
| 865 | 1 |  | 0.00000000067548 | 0.0000000000000459 |
| 865 | 2 |  | 0.00000008507996 | 0.0000000000057875 |
| 865 | 3 |  | 0.00000018195599 | 0.0000000000123773 |
| 865 | 4 |  | 0.00000200825079 | 0.0000000001366086 |
| 865 | 5 |  | 0.00020816918328 | 0.0000000141604329 |
| 865 | 6 |  | 0.00133220860892 | 0.0000000906217255 |
| 915 | 0 |  | 0.00000000032051 | 0.0000000000000200 |
| 915 | 1 |  | 0.00000000459518 | 0.0000000000002873 |
| 915 | 2 |  | 0.00000005691750 | 0.0000000000035589 |
| 915 | 3 |  | 0.00000190393055 | 0.0000000001190486 |
| 915 | 4 |  | 0.00000169704060 | 0.0000000001061122 |
| 915 | 5 |  | 0.00001797393749 | 0.0000000011238708 |
| 915 | 6 |  | 0.00154895355386 | 0.0000000968526626 |
| 965 | 0 |  | 0.00000000042900 | 0.0000000000000248 |
| 965 | 1 |  | 0.00000001542176 | 0.0000000000008904 |
| 965 | 2 |  | 0.00000012976675 | 0.0000000000074920 |
| 965 | 3 |  | 0.00000015464663 | 0.0000000000089284 |
| 965 | 4 |  | 0.00000412742179 | 0.0000000002382929 |
| 965 | 5 |  | 0.00000063015891 | 0.0000000000363816 |
| 965 | 6 |  | 0.00165748873057 | 0.0000000956935911 |

Приложение 2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| k | ‖xn - xk‖ | ‖x\*-xk‖/‖x\*‖ |
| 15 | 259.34702409835910 | 7.3649605756710880 |
| 65 | 138608.33465152525000 | 452.8982857727000400 |
| 115 | 480884.82686606730000 | 671.0158746239665000 |
| 165 | 407861.52801675803000 | 331.8015069409954000 |
| 215 | 529199304.93860960000000 | 289741.1300883682000000 |
| 265 | 1217835.28193678520000 | 487.5881712617839000 |
| 315 | 1899092.17478458440000 | 586.9595480051802000 |
| 365 | 6324345.04523482200000 | 1567.6370459255056000 |
| 415 | 7934297.63299700600000 | 1622.6052895938808000 |
| 465 | 8623516.60969150300000 | 1487.1875946023906000 |
| 515 | 17515928.09579663400000 | 2592.0953974573117000 |
| 565 | 45953484.61965941000000 | 5918.7545803334660000 |
| 615 | 5178358772.21829500000000 | 587368.7287011959000000 |
| 665 | 18485528.51850561400000 | 1864.9643404870762000 |
| 715 | 34617424.90895326400000 | 3132.8603414938966000 |
| 765 | 32909091.27558392700000 | 2691.2795889795890000 |
| 815 | 38791488.16819092000000 | 2885.1021991187830000 |
| 865 | 30235416.16499347600000 | 2056.7241245410550000 |
| 915 | 168870439.23620066000000 | 10559.0975511652210000 |
| 965 | 66272180.27241713600000 | 3826.1635228599716000 |

Приложение 3

S - количество действий;

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | LU-разложение | | | метод Гаусса | | |
| n | k | ‖xn - xk‖ | ‖x\*-xk‖/‖x\*‖ | S | ‖xn - xk‖ | ‖x\*-xk‖/‖x\*‖ | S |
| 15 | 0 | 0.00000000000041 | 0.0000000000000117 | 224 | 0.00000000000042 | 0.0000000000000118 | 1450 |
| 15 | 3 | 0.00000000008434 | 0.0000000000023951 | 221 | 0.00000000008434 | 0.0000000000023951 | 1450 |
| 15 | 6 | 0.00000001528084 | 0.0000000004339467 | 223 | 0.00000001528084 | 0.0000000004339466 | 1450 |
| 115 | 0 | 0.00000000000255 | 0.0000000000000036 | 13192 | 0.00000000000241 | 0.0000000000000034 | 526700 |
| 115 | 3 | 0.00000000548645 | 0.0000000000076557 | 13195 | 0.00000000548631 | 0.0000000000076555 | 526700 |
| 115 | 6 | 0.00001275237923 | 0.0000000177943832 | 13193 | 0.00001275237921 | 0.0000000177943832 | 526700 |
| 215 | 0 | 0.00000000001254 | 0.0000000000000069 | 46182 | 0.00000000001260 | 0.0000000000000069 | 3381950 |
| 215 | 3 | 0.00000002272447 | 0.0000000000124418 | 46181 | 0.00000002272454 | 0.0000000000124419 | 3381950 |
| 215 | 6 | 0.00000680995161 | 0.0000000037285066 | 46172 | 0.00000680995165 | 0.0000000037285066 | 3381950 |
| 315 | 0 | 0.00000000002109 | 0.0000000000000065 | 99144 | 0.00000000002112 | 0.0000000000000065 | 10567200 |
| 315 | 3 | 0.00000005291591 | 0.0000000000163549 | 99162 | 0.00000005291565 | 0.0000000000163548 | 10567200 |
| 315 | 6 | 0.00011939986708 | 0.0000000369033652 | 99142 | 0.00011939986775 | 0.0000000369033654 | 10567200 |
| 415 | 0 | 0.00000000020281 | 0.0000000000000415 | 172114 | 0.00000000020291 | 0.0000000000000415 | 24082450 |
| 415 | 3 | 0.00000008095069 | 0.0000000000165548 | 172124 | 0.00000008095050 | 0.0000000000165548 | 24082450 |
| 415 | 6 | 0.00002550153320 | 0.0000000052151967 | 172128 | 0.00002550153368 | 0.0000000052151968 | 24082450 |
| 515 | 0 | 0.00000000012941 | 0.0000000000000192 | 265096 | 0.00000000012927 | 0.0000000000000191 | 45927700 |
| 515 | 3 | 0.00000061581156 | 0.0000000000911309 | 265101 | 0.00000061581017 | 0.0000000000911307 | 45927700 |
| 515 | 6 | 0.00021179568571 | 0.0000000313425940 | 265091 | 0.00021179568557 | 0.0000000313425939 | 45927700 |
| 615 | 0 | 0.00000000040747 | 0.0000000000000462 | 378063 | 0.00000000040681 | 0.0000000000000461 | 78102950 |
| 615 | 3 | 0.00000024487622 | 0.0000000000277757 | 378077 | 0.00000024487553 | 0.0000000000277756 | 78102950 |
| 615 | 6 | 0.00160280387454 | 0.0000001818021724 | 378063 | 0.00160280387375 | 0.0000001818021723 | 78102950 |
| 715 | 0 | 0.00000000051016 | 0.0000000000000462 | 511059 | 0.00000000051008 | 0.0000000000000462 | 122608200 |
| 715 | 3 | 0.00000086380646 | 0.0000000000781741 | 511046 | 0.00000086380606 | 0.0000000000781740 | 122608200 |
| 715 | 6 | 0.00000103384741 | 0.0000000000935627 | 511027 | 0.00000103384952 | 0.0000000000935629 | 122608200 |
| 815 | 0 | 0.00000000051656 | 0.0000000000000384 | 664021 | 0.00000000051843 | 0.0000000000000386 | 181443450 |
| 815 | 3 | 0.00000095593851 | 0.0000000000710976 | 664057 | 0.00000095593740 | 0.0000000000710975 | 181443450 |
| 815 | 6 | 0.00007212227745 | 0.0000000053640670 | 664033 | 0.00007212227885 | 0.0000000053640671 | 181443450 |
| 915 | 0 | 0.00000000032051 | 0.0000000000000200 | 837015 | 0.00000000032103 | 0.0000000000000201 | 256608700 |
| 915 | 3 | 0.00000190393055 | 0.0000000001190486 | 836945 | 0.00000190393183 | 0.0000000001190487 | 256608700 |
| 915 | 6 | 0.00154895355386 | 0.0000000968526626 | 836995 | 0.00154895355634 | 0.0000000968526628 | 256608700 |

Приложение 4

