Методы оптимизации.

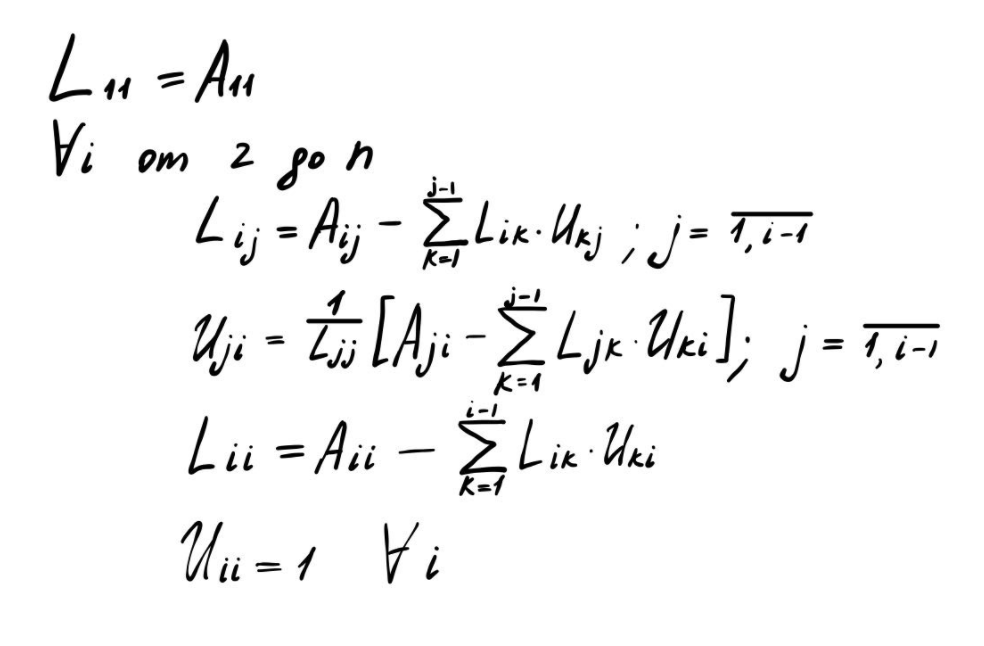
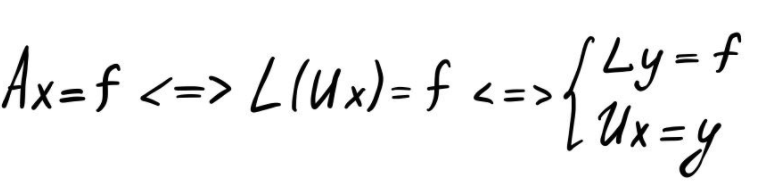
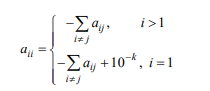
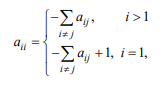
Отчет по лабораторной работе №3

Работа выполнена группой:

Дзюба Мария M3235  
Карасева Екатерина M3235  
Рындина Валерия M3235

Университет ИТМО, 2021

Цель работы: Изучить и реализовать методы решения СЛАУ. Провести исследование методов по различным характеристикам.

* 1. Постановка задачи  
     Реализовать прямой метод решения СЛАУ на основе LU-разложения.
  2. Решение задачи:
     + Вычислительная схема метода:  
       исходная задача: Ax = f  
       преобразуем задачу в: Ux = y = L-1f => LUx = f, где U - это верхнедиагональная матрица, L - это нижнедиагональная матрица.  
       То есть матрицу А можно представить как A=LU, по следующим формулам:  
         
       Итоговая задача в итоге преобразуется в систему уравнений:  
         
       Итоговая задача в итоге преобразуется в систему уравнений: Каждое из уравнений полученной системы легко решается обратным ходом метода Гаусса в контексте того, что матрицы U и L являются верхнедиагональными и нижнедиагональными.
     + Пример решения задачи реализованным методом:
       1. Условие задачи и начальные данные:   
          x =
       2. Численный ответ: x =
  3. Постановка задачи:  
     Провести исследование реализованного метода на матрицах, число обусловленности которых регулируется за счёт изменения диагонального преобладания (то есть оценить влияние увеличения числа обусловленности на точность решения). Для этого необходимо решить последовательность СЛАУ: Akxk = fk, k = 0, 1, 2, 3…  
     Для каждого k, для которого система Akxk = fk вычислительно разрешима, оценить погрешность найденного решения.
  4. Решение задачи:
     + Схема построения СЛАУ:  
       матрицы Ak строятся следующим образом:  
         
       и aij ∈ {0, -1, -2, -3, -4} выбираются достаточно произвольно, а правая часть fk получается умножением матрицы Аk на вектор x\* = (1, 2, … n).
     + Пример решения задачи реализованным методом: см пример в Задаче 1
     + Исследования погрешностей найденного решения: см **Приложение 1**
  5. Вывод:   
     Влияние изменения диагонального преобладания становится очевидным если посмотреть на таблицы исследования: с увеличением числа обусловленности точность решения уменьшается, что особенно хорошо заметно при переходе от хорошо обусловленных матриц к плохо обусловленным. Также стоит отметить, что погрешность растет экспоненциально, так как число обусловленности приведенных матриц порядка 10-k
  6. Постановка задачи:  
     Провести исследования, аналогичные приведенным в Задаче 2, на матрицах Гильберта различной размерности k.
  7. Решение задачи:
     + Схема построения СЛАУ:  
       матрицы Гильберта Ak строятся следующим образом:  
         
       правая часть fk получается умножением матрицы Аk на вектор x\* = (1, 2, … k).
     + Пример решения задачи реализованным методом:
       1. Условие задачи и начальные данные:   
          \* x =
       2. Численный ответ: x =
     + Исследования погрешностей найденного решения:  
       см **Приложение 2**
  8. Вывод:   
     По результатам исследования мы видим огромную погрешность, которая имеет тенденцию увеличиваться с возрастанием размерности матрицы. Это можно объяснить тем, что число обусловленность матрицы Гильберта размерности k × k возрастает как O() ≈ , то есть возрастает экспоненциально, поэтому на таких плохо обусловленных задачах даже на маленьких размерностях метод получает ответ с большой погрешностью.
  9. Постановка задачи:  
     Реализовать метод Гаусса с выбором ведущего элемента для плотных матриц. Сравнить метод Гаусса по точности получаемого решения и по количеству действий с реализованным прямым методом LU-разложения.
  10. Решение задачи:
      + Вычислительная схема метода Гаусса:  
        Выбираем столбец слева направо. В текущем столбце находим сточку, у который элемент в данном столбце наибольший, преобразуем этот элемент в единицу делением всей строки на его величину. Переносим эту строчку наверх. Затем обнуляем другие элементы текущего столбца – для этого вычитаем из оставшихся строк выбранную строчку, умноженную на элемент, который хотим занулить. Проделываем эту операцию n раз, не затрагивая столбцы, которые мы уже обнулили, и строчки, которые уже были перенесены наверх.
      + Пример решения задачи реализованным методом:
        1. Условие задачи и начальные данные:  
           x =
        2. Численный ответ: x =
      + Таблица сравнения метода Гаусса и прямого метода LU-разложения по точности получаемого решения и количеству действий:   
        см **Приложение 3.**
  11. Вывод: Можно проследить, что оба метода имеют практически идентичные значения при подсчете погрешности, что говорит об равной точности. Но стоит отметить, что метод Гаусса производит в разы больше действий, чем метод LU-разложения. Но стоит отметить, что метод LU-разложения осложняется тем, что нам необходимо разложить матрицу на две, соответственно, лучше использовать этот метод, когда мы работаем с одной и той же матрицей много раз.
  12. Преимущества и недостатки прямых методов:  
      Недостатки: изменение профиля матрицы при перестановке строк, потеря свойства разреженности.  
      Преимущества: независимость методов от начального приближения.
  13. Постановка задачи:  
      Реализовать метод сопряженных градиентов для решения СЛАУ, матрица которых хранится в разреженном строчно-столбцовом формате и является симметричной.
      + Подзадача 1
        1. Описание подзадачи:  
           Протестировать разработанную программу. Для тестирования использовать матрицы небольшой размерности, при этом вектор правой части формировать умножением тестовой матрицы на заданный вектор.
      + Решение подзадачи:
        1. Вычислительная схема метода:  
           Пусть дана система линейных уравнений Ax = b, причём матрица системы - действительная матрица, обладающая свойством 𝐴 = 𝐴T > 0, т.е. это симметричная положительно определенная матрица. Тогда процесс решения СЛАУ можно представить как минимизацию следующего функционала:  
           (𝐴𝑥, 𝑥) − 2(𝑏, 𝑥) → 𝑚𝑖𝑛  
           Для минимизации используется метод сопряженных градиентов.  
           Итерационный процесс:  
           Выбирается начальное приближение 𝑥0 и полагается  
           r0 = f – Ax0, z0 = r0  
           Далее для k = 1, 2, … производятся следующие вычисления:  
           𝑎k =   
           xk = xk-1+ akzk-1  
           rk = rk-1 – akAzk-1  
           βk =   
           zk = rk + βkzk-1  
           где   
           𝑥0 – вектор начального приближения;   
           xk – вектор решения на k-й итерации;   
           rk – вектор невязки на k-й итерации;  
           zk – вектор спуска (сопряженное направление) на k-й итерации;  
           𝑎k, βk – коэффициенты
        2. Пример решения задачи реализованным методом:
           - Условие задачи и входные данные:  
             x =
           - Численный ответ: x =
      + Подзадача 2
        1. Описание подзадачи  
           Провести исследование реализованного метода на матрице с диагональным преобладанием, построенной следующим образом:  
             
           и aij ∈ {0, -1, -2, -3, -4} выбираются достаточно произвольно, а правая часть fk получается умножением матрицы Аk на вектор x\* = (1, … n).  
           Для каждого полученного решения с помощью невязки и погрешности оценить число обусловленности
        2. Решение подзадачи:  
           Таблица исследования приведена в **Приложении 4**
        3. Вывод.   
           Можно заметить, что при больших n количество итераций довольно мало – на порядки меньше, чем n. А также отметим, что относительная погрешность почти константна.
      + Подзадача 3
        1. Описание подзадачи:  
           Провести аналогичные подзадаче 2 исследования на матрице с обратным знаком внедиагональных элементов.
        2. Решение подзадачи:  
           Таблица исследования приведена в **Приложении 5**
        3. Вывод:  
           Аналогично предыдущей подзадаче – число итераций много меньше n и относительная погрешность константна, но меньше, чем в предыдущей подзадаче.
      + Подзадачи 4
        1. Описание подзадачи:  
           Повторить аналогичные подзадаче 2 исследования для плотной матрицы Гильберта для различных размерностей.
        2. Решение подзадачи:  
           Таблица исследования приведена в **Приложении 6**
        3. Вывод:  
           По таблицам исследования можно заметить, что метод сопряженных градиентов лучше справляется с примерами плохо обусловленных матриц, чем методы, исследуемые выше.  
           Ранее было замечено, что погрешность растет экспоненциально, но здесь можно сделать вывод, что относительная погрешность примерно остается константой, а абсолютная растет линейно при росте n.
  14. Вывод:  
      Метод сопряженных градиентов демонстрирует оптимальный результат при работе как с хорошо, так и с плохо обусловленными задачами. Однако стоит отметить, что если матрица исходной задачи не была симметричной, то использование метода осложняется тем, что сперва нужно симметризовать матрицу.

1. 1. Постановка задачи:
2. Для разработанного программного кода в отчете привести код основных модулей, диаграмму классов, сделать текстовое описание.
   1. Решение задачи
3. Код основных модулей и текстовое описание представлены по ссылке <https://github.com/MariaDziuba/metopt3>. Диаграмма классов приведена в **Приложение 7**.

Приложение 1

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| n | k |  | ‖ x\*-xk ‖ | ‖x\*-xk‖/‖x\*‖ |
| 15 | 0 |  | 0.00000000000041 | 0.0000000000000117 |
| 15 | 1 |  | 0.00000000000057 | 0.0000000000000161 |
| 15 | 2 |  | 0.00000000000303 | 0.0000000000000861 |
| 15 | 3 |  | 0.00000000008434 | 0.0000000000023951 |
| 15 | 4 |  | 0.00000000020212 | 0.0000000000057399 |
| 15 | 5 |  | 0.00000000326162 | 0.0000000000926237 |
| 15 | 6 |  | 0.00000001528084 | 0.0000000004339467 |
| 65 | 0 |  | 0.00000000000021 | 0.0000000000000007 |
| 65 | 1 |  | 0.00000000001720 | 0.0000000000000562 |
| 65 | 2 |  | 0.00000000002563 | 0.0000000000000837 |
| 65 | 3 |  | 0.00000000048441 | 0.0000000000015828 |
| 65 | 4 |  | 0.00000003175205 | 0.0000000001037488 |
| 65 | 5 |  | 0.00000002630400 | 0.0000000000859475 |
| 65 | 6 |  | 0.00000001616883 | 0.0000000000528311 |
| 115 | 0 |  | 0.00000000000255 | 0.0000000000000036 |
| 115 | 1 |  | 0.00000000001385 | 0.0000000000000193 |
| 115 | 2 |  | 0.00000000091658 | 0.0000000000012790 |
| 115 | 3 |  | 0.00000000548645 | 0.0000000000076557 |
| 115 | 4 |  | 0.00000004558477 | 0.0000000000636080 |
| 115 | 5 |  | 0.00000008716376 | 0.0000000001216263 |
| 115 | 6 |  | 0.00001275237923 | 0.0000000177943832 |
| 165 | 0 |  | 0.00000000000680 | 0.0000000000000055 |
| 165 | 1 |  | 0.00000000013185 | 0.0000000000001073 |
| 165 | 2 |  | 0.00000000137880 | 0.0000000000011217 |
| 165 | 3 |  | 0.00000000670192 | 0.0000000000054521 |
| 165 | 4 |  | 0.00000006883962 | 0.0000000000560021 |
| 165 | 5 |  | 0.00000025185766 | 0.0000000002048900 |
| 165 | 6 |  | 0.00000143245093 | 0.0000000011653204 |
| 215 | 0 |  | 0.00000000001254 | 0.0000000000000069 |
| 215 | 1 |  | 0.00000000018244 | 0.0000000000000999 |
| 215 | 2 |  | 0.00000000042157 | 0.0000000000002308 |
| 215 | 3 |  | 0.00000002272447 | 0.0000000000124418 |
| 215 | 4 |  | 0.00000055434033 | 0.0000000003035061 |
| 215 | 5 |  | 0.00000317557055 | 0.0000000017386519 |
| 215 | 6 |  | 0.00000680995161 | 0.0000000037285066 |
| 265 | 0 |  | 0.00000000002078 | 0.0000000000000083 |
| 265 | 1 |  | 0.00000000078908 | 0.0000000000003159 |
| 265 | 2 |  | 0.00000000940523 | 0.0000000000037656 |
| 265 | 3 |  | 0.00000003259960 | 0.0000000000130520 |
| 265 | 4 |  | 0.00000169197672 | 0.0000000006774215 |
| 265 | 5 |  | 0.00000652602387 | 0.0000000026128427 |
| 265 | 6 |  | 0.00000300238652 | 0.0000000012020740 |
| 315 | 0 |  | 0.00000000002109 | 0.0000000000000065 |
| 315 | 1 |  | 0.00000000012349 | 0.0000000000000382 |
| 315 | 2 |  | 0.00000000822502 | 0.0000000000025421 |
| 315 | 3 |  | 0.00000005291591 | 0.0000000000163549 |
| 315 | 4 |  | 0.00000075180849 | 0.0000000002323643 |
| 315 | 5 |  | 0.00001171868421 | 0.0000000036219377 |
| 315 | 6 |  | 0.00011939986708 | 0.0000000369033652 |
| 365 | 0 |  | 0.00000000005412 | 0.0000000000000134 |
| 365 | 1 |  | 0.00000000024717 | 0.0000000000000613 |
| 365 | 2 |  | 0.00000002459916 | 0.0000000000060975 |
| 365 | 3 |  | 0.00000019482658 | 0.0000000000482923 |
| 365 | 4 |  | 0.00000024109461 | 0.0000000000597609 |
| 365 | 5 |  | 0.00001216054094 | 0.0000000030142749 |
| 365 | 6 |  | 0.00007707991131 | 0.0000000191060614 |
| 415 | 0 |  | 0.00000000020281 | 0.0000000000000415 |
| 415 | 1 |  | 0.00000000138560 | 0.0000000000002834 |
| 415 | 2 |  | 0.00000000689983 | 0.0000000000014111 |
| 415 | 3 |  | 0.00000008095069 | 0.0000000000165548 |
| 415 | 4 |  | 0.00000211298840 | 0.0000000004321172 |
| 415 | 5 |  | 0.00001241771684 | 0.0000000025394879 |
| 415 | 6 |  | 0.00002550153320 | 0.0000000052151967 |
| 465 | 0 |  | 0.00000000002396 | 0.0000000000000041 |
| 465 | 1 |  | 0.00000000281374 | 0.0000000000004852 |
| 465 | 2 |  | 0.00000002278490 | 0.0000000000039294 |
| 465 | 3 |  | 0.00000003673907 | 0.0000000000063359 |
| 465 | 4 |  | 0.00000146534128 | 0.0000000002527087 |
| 465 | 5 |  | 0.00000332743770 | 0.0000000005738406 |
| 465 | 6 |  | 0.00032426557451 | 0.0000000559219355 |
| 515 | 0 |  | 0.00000000012941 | 0.0000000000000192 |
| 515 | 1 |  | 0.00000000094176 | 0.0000000000001394 |
| 515 | 2 |  | 0.00000001431519 | 0.0000000000021184 |
| 515 | 3 |  | 0.00000061581156 | 0.0000000000911309 |
| 515 | 4 |  | 0.00000588208640 | 0.0000000008704608 |
| 515 | 5 |  | 0.00006842920693 | 0.0000000101264992 |
| 515 | 6 |  | 0.00021179568571 | 0.0000000313425940 |
| 565 | 0 |  | 0.00000000028672 | 0.0000000000000369 |
| 565 | 1 |  | 0.00000000288284 | 0.0000000000003713 |
| 565 | 2 |  | 0.00000006890086 | 0.0000000000088743 |
| 565 | 3 |  | 0.00000100517666 | 0.0000000001294656 |
| 565 | 4 |  | 0.00000597622684 | 0.0000000007697310 |
| 565 | 5 |  | 0.00000876836455 | 0.0000000011293550 |
| 565 | 6 |  | 0.00073509193712 | 0.0000000946789739 |
| 615 | 0 |  | 0.00000000040747 | 0.0000000000000462 |
| 615 | 1 |  | 0.00000000200415 | 0.0000000000002273 |
| 615 | 2 |  | 0.00000004505048 | 0.0000000000051100 |
| 615 | 3 |  | 0.00000024487622 | 0.0000000000277757 |
| 615 | 4 |  | 0.00000473857480 | 0.0000000005374851 |
| 615 | 5 |  | 0.00009132824521 | 0.0000000103591423 |
| 615 | 6 |  | 0.00160280387454 | 0.0000001818021724 |
| 665 | 0 |  | 0.00000000005899 | 0.0000000000000060 |
| 665 | 1 |  | 0.00000000181798 | 0.0000000000001834 |
| 665 | 2 |  | 0.00000010982234 | 0.0000000000110797 |
| 665 | 3 |  | 0.00000031550361 | 0.0000000000318305 |
| 665 | 4 |  | 0.00000544870217 | 0.0000000005497076 |
| 665 | 5 |  | 0.00001021666573 | 0.0000000010307369 |
| 665 | 6 |  | 0.00013246921032 | 0.0000000133645275 |
| 715 | 0 |  | 0.00000000051016 | 0.0000000000000462 |
| 715 | 1 |  | 0.00000000742138 | 0.0000000000006716 |
| 715 | 2 |  | 0.00000003401057 | 0.0000000000030779 |
| 715 | 3 |  | 0.00000086380646 | 0.0000000000781741 |
| 715 | 4 |  | 0.00000975922102 | 0.0000000008832048 |
| 715 | 5 |  | 0.00010151526471 | 0.0000000091870827 |
| 715 | 6 |  | 0.00000103384741 | 0.0000000000935627 |
| 765 | 0 |  | 0.00000000099788 | 0.0000000000000816 |
| 765 | 1 |  | 0.00000000281930 | 0.0000000000002306 |
| 765 | 2 |  | 0.00000000761303 | 0.0000000000006226 |
| 765 | 3 |  | 0.00000092163940 | 0.0000000000753709 |
| 765 | 4 |  | 0.00000585440923 | 0.0000000004787690 |
| 765 | 5 |  | 0.00003020160485 | 0.0000000024698635 |
| 765 | 6 |  | 0.00023100572938 | 0.0000000188914668 |
| 815 | 0 |  | 0.00000000051656 | 0.0000000000000384 |
| 815 | 1 |  | 0.00000001147072 | 0.0000000000008531 |
| 815 | 2 |  | 0.00000003118130 | 0.0000000000023191 |
| 815 | 3 |  | 0.00000095593851 | 0.0000000000710976 |
| 815 | 4 |  | 0.00000354051570 | 0.0000000002633245 |
| 815 | 5 |  | 0.00005051949545 | 0.0000000037573683 |
| 815 | 6 |  | 0.00007212227745 | 0.0000000053640670 |
| 865 | 0 |  | 0.00000000068211 | 0.0000000000000464 |
| 865 | 1 |  | 0.00000000067548 | 0.0000000000000459 |
| 865 | 2 |  | 0.00000008507996 | 0.0000000000057875 |
| 865 | 3 |  | 0.00000018195599 | 0.0000000000123773 |
| 865 | 4 |  | 0.00000200825079 | 0.0000000001366086 |
| 865 | 5 |  | 0.00020816918328 | 0.0000000141604329 |
| 865 | 6 |  | 0.00133220860892 | 0.0000000906217255 |
| 915 | 0 |  | 0.00000000032051 | 0.0000000000000200 |
| 915 | 1 |  | 0.00000000459518 | 0.0000000000002873 |
| 915 | 2 |  | 0.00000005691750 | 0.0000000000035589 |
| 915 | 3 |  | 0.00000190393055 | 0.0000000001190486 |
| 915 | 4 |  | 0.00000169704060 | 0.0000000001061122 |
| 915 | 5 |  | 0.00001797393749 | 0.0000000011238708 |
| 915 | 6 |  | 0.00154895355386 | 0.0000000968526626 |
| 965 | 0 |  | 0.00000000042900 | 0.0000000000000248 |
| 965 | 1 |  | 0.00000001542176 | 0.0000000000008904 |
| 965 | 2 |  | 0.00000012976675 | 0.0000000000074920 |
| 965 | 3 |  | 0.00000015464663 | 0.0000000000089284 |
| 965 | 4 |  | 0.00000412742179 | 0.0000000002382929 |
| 965 | 5 |  | 0.00000063015891 | 0.0000000000363816 |
| 965 | 6 |  | 0.00165748873057 | 0.0000000956935911 |

Приложение 2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| k | ‖ x\*-xk ‖ | ‖x\*-xk‖/‖x\*‖ |
| 15 | 259.34702409835910 | 7.3649605756710880 |
| 65 | 138608.33465152525000 | 452.8982857727000400 |
| 115 | 480884.82686606730000 | 671.0158746239665000 |
| 165 | 407861.52801675803000 | 331.8015069409954000 |
| 215 | 529199304.93860960000000 | 289741.1300883682000000 |
| 265 | 1217835.28193678520000 | 487.5881712617839000 |
| 315 | 1899092.17478458440000 | 586.9595480051802000 |
| 365 | 6324345.04523482200000 | 1567.6370459255056000 |
| 415 | 7934297.63299700600000 | 1622.6052895938808000 |
| 465 | 8623516.60969150300000 | 1487.1875946023906000 |
| 515 | 17515928.09579663400000 | 2592.0953974573117000 |
| 565 | 45953484.61965941000000 | 5918.7545803334660000 |
| 615 | 5178358772.21829500000000 | 587368.7287011959000000 |
| 665 | 18485528.51850561400000 | 1864.9643404870762000 |
| 715 | 34617424.90895326400000 | 3132.8603414938966000 |
| 765 | 32909091.27558392700000 | 2691.2795889795890000 |
| 815 | 38791488.16819092000000 | 2885.1021991187830000 |
| 865 | 30235416.16499347600000 | 2056.7241245410550000 |
| 915 | 168870439.23620066000000 | 10559.0975511652210000 |
| 965 | 66272180.27241713600000 | 3826.1635228599716000 |

Приложение 3

S - количество действий.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | LU-разложение | | | метод Гаусса | | |
| n | k | ‖ x\*-xk ‖ | ‖x\*-xk‖/‖x\*‖ | S | ‖ x\*-xk ‖ | ‖x\*-xk‖/‖x\*‖ | S |
| 15 | 0 | 0.00000000000041 | 0.0000000000000117 | 224 | 0.00000000000042 | 0.0000000000000118 | 1450 |
| 15 | 3 | 0.00000000008434 | 0.0000000000023951 | 221 | 0.00000000008434 | 0.0000000000023951 | 1450 |
| 15 | 6 | 0.00000001528084 | 0.0000000004339467 | 223 | 0.00000001528084 | 0.0000000004339466 | 1450 |
| 115 | 0 | 0.00000000000255 | 0.0000000000000036 | 13192 | 0.00000000000241 | 0.0000000000000034 | 526700 |
| 115 | 3 | 0.00000000548645 | 0.0000000000076557 | 13195 | 0.00000000548631 | 0.0000000000076555 | 526700 |
| 115 | 6 | 0.00001275237923 | 0.0000000177943832 | 13193 | 0.00001275237921 | 0.0000000177943832 | 526700 |
| 215 | 0 | 0.00000000001254 | 0.0000000000000069 | 46182 | 0.00000000001260 | 0.0000000000000069 | 3381950 |
| 215 | 3 | 0.00000002272447 | 0.0000000000124418 | 46181 | 0.00000002272454 | 0.0000000000124419 | 3381950 |
| 215 | 6 | 0.00000680995161 | 0.0000000037285066 | 46172 | 0.00000680995165 | 0.0000000037285066 | 3381950 |
| 315 | 0 | 0.00000000002109 | 0.0000000000000065 | 99144 | 0.00000000002112 | 0.0000000000000065 | 10567200 |
| 315 | 3 | 0.00000005291591 | 0.0000000000163549 | 99162 | 0.00000005291565 | 0.0000000000163548 | 10567200 |
| 315 | 6 | 0.00011939986708 | 0.0000000369033652 | 99142 | 0.00011939986775 | 0.0000000369033654 | 10567200 |
| 415 | 0 | 0.00000000020281 | 0.0000000000000415 | 172114 | 0.00000000020291 | 0.0000000000000415 | 24082450 |
| 415 | 3 | 0.00000008095069 | 0.0000000000165548 | 172124 | 0.00000008095050 | 0.0000000000165548 | 24082450 |
| 415 | 6 | 0.00002550153320 | 0.0000000052151967 | 172128 | 0.00002550153368 | 0.0000000052151968 | 24082450 |
| 515 | 0 | 0.00000000012941 | 0.0000000000000192 | 265096 | 0.00000000012927 | 0.0000000000000191 | 45927700 |
| 515 | 3 | 0.00000061581156 | 0.0000000000911309 | 265101 | 0.00000061581017 | 0.0000000000911307 | 45927700 |
| 515 | 6 | 0.00021179568571 | 0.0000000313425940 | 265091 | 0.00021179568557 | 0.0000000313425939 | 45927700 |
| 615 | 0 | 0.00000000040747 | 0.0000000000000462 | 378063 | 0.00000000040681 | 0.0000000000000461 | 78102950 |
| 615 | 3 | 0.00000024487622 | 0.0000000000277757 | 378077 | 0.00000024487553 | 0.0000000000277756 | 78102950 |
| 615 | 6 | 0.00160280387454 | 0.0000001818021724 | 378063 | 0.00160280387375 | 0.0000001818021723 | 78102950 |
| 715 | 0 | 0.00000000051016 | 0.0000000000000462 | 511059 | 0.00000000051008 | 0.0000000000000462 | 122608200 |
| 715 | 3 | 0.00000086380646 | 0.0000000000781741 | 511046 | 0.00000086380606 | 0.0000000000781740 | 122608200 |
| 715 | 6 | 0.00000103384741 | 0.0000000000935627 | 511027 | 0.00000103384952 | 0.0000000000935629 | 122608200 |
| 815 | 0 | 0.00000000051656 | 0.0000000000000384 | 664021 | 0.00000000051843 | 0.0000000000000386 | 181443450 |
| 815 | 3 | 0.00000095593851 | 0.0000000000710976 | 664057 | 0.00000095593740 | 0.0000000000710975 | 181443450 |
| 815 | 6 | 0.00007212227745 | 0.0000000053640670 | 664033 | 0.00007212227885 | 0.0000000053640671 | 181443450 |
| 915 | 0 | 0.00000000032051 | 0.0000000000000200 | 837015 | 0.00000000032103 | 0.0000000000000201 | 256608700 |
| 915 | 3 | 0.00000190393055 | 0.0000000001190486 | 836945 | 0.00000190393183 | 0.0000000001190487 | 256608700 |
| 915 | 6 | 0.00154895355386 | 0.0000000968526626 | 836995 | 0.00154895355634 | 0.0000000968526628 | 256608700 |

Приложение 4

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| n | iter |  |  | cond(A) |
| 15 | 499 | 0.000028652491 | 0.000000813676 | 1.8827062 |
| 50 | 499 | 0.000241491970 | 0.000001165595 | 1.2197750 |
| 200 | 74 | 0.001859437426 | 0.000001134415 | 1.3748306 |
| 500 | 49 | 0.007409915377 | 0.000001146220 | 1.6653173 |
| 1000 | 51 | 0.020973409778 | 0.000001147900 | 1.7256524 |
| 2000 | 76 | 0.059122820810 | 0.000001144479 | 1.7472275 |
| 5000 | 277 | 0.233987837801 | 0.000001146130 | 1.7649603 |
| 10000 | 769 | 0.190815454588 | 0.000001144027 | 1.6772481 |
| 100000 | 912 | 0.270850324567 | 0.000001145283 | 1.7602211 |

Приложение 5

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| n | iter |  |  | cond(A) |
| 15 | 499 | 0.004457925 | 0.00000126597 | 1.587788 |
| 50 | 499 | 0.025130571 | 0.00000121296 | 1.392519 |
| 200 | 24 | 0.144696635 | 0.00000088277 | 1.175443 |
| 500 | 19 | 0.534903802 | 0.00000082743 | 1.134510 |
| 1000 | 20 | 1.504756470 | 0.00000082357 | 1.125866 |
| 2000 | 21 | 4.193945571 | 0.00000081185 | 1.120621 |
| 5000 | 21 | 16.534110769 | 0.00000080988 | 1.118112 |
| 10000 | 36 | 33.612346007 | 0.00000088742 | 1.347584 |
| 100000 | 52 | 458.231680217 | 0.00000089370 | 1.600114 |

Приложение 6

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| n | iter |  |  | cond(A) |
| 15 | 24 | 0.003370 | 0.000096 | 20391171203.742350 |
| 50 | 40 | 0.021094 | 0.000102 | 12895964506.532433 |
| 200 | 89 | 0.094734 | 0.000058 | 7358859782.145118 |
| 500 | 107 | 0.459367 | 0.000071 | 11301831242.305489 |
| 1000 | 142 | 1.044254 | 0.000057 | 6279638633.168895 |

Приложение 7

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание